Ueber die

Flächen zweiten Grades, für welche zwei Flächen zweiten Grades zu einander polar sind.

Inaugural-Dissertation

welche

mit Genehmigung der philosophischen Facultät der Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Sonnabend, den 29. September 1877, Vormittags 11 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich vertheidigen wird

Hermann Thieme

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

gegen die Herren

Georg Zickerow, Dd. phil., und **Robert Pflanz**, cand. math.

Dresden,
Druck von B. G. Teubner.
1877.

Herrn

Professor Dr. H. Schroeter

in innigster Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet

vom

Verfasser.

Für die Aufgaben, zu zwei Kegelschnitten einer Ebene andere Kegelschnitte und zu zwei Flächen zweiten Grades andere Flächen zweiten Grades zu finden, für welche die gegebenen Curven oder Flächen polar zu einander sind, hat zuerst Steiner Lösungen gegeben, diese uns aber nur in einer kurzen Notiz überliefert.[1]) Später fand die Aufgabe der Ebene eine Lösung durch Herrn Cremona[2]), eine eingehende Behandlung durch Herrn Prof. Rosanes[3]) auf analytischem und durch Herrn Prof. Schroeter[4]) auf synthetischem Wege. Auf dieselbe Frage beziehen sich die Arbeiten der Herren Ruffini[5]), Battaglini[6]) und Siacci[7]). Das Problem für Flächen zweiten Grades ist im Zusammenhange mit den entsprechenden Fragen für eine und zwei Dimensionen von Herrn d'Ovidio[8]) in analytischer Methode behandelt worden.

Das Folgende enthält eine synthetische Lösung des Problems für drei Dimensionen. Um eine möglichst einheitliche Methode der Untersuchung anwenden zu können, behandle ich zunächst die entsprechende Frage für Punktsysteme einer Geraden (§ 1). Dann suche ich die Bedingungen der Lösbarkeit des Problems für drei Dimensionen, construire allgemein die Flächen, welche die Lösung bilden, und leite die in jedem Falle ihnen zukommenden Eigenschaften ab (§ 2). In § 3 behandle ich die Lösung, wenn das den gegebenen Flächen gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole 4, in § 4, wenn es 2, in § 5, wenn es 0 reelle Ecken hat.

---

1) Crelle, Bd. 32 S. 79.

2) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* S. 89.

3) Inaugural-Diss., Breslau 1865.

4) Theorie der Kegelschnitte, 2. Aufl., S. 391 flg.

5) *Memorie della R^a. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena t. 13° e 14°.*

6) *Atti della R^a. Accad. de' Lincei di Roma, Sessione del 7 aprile 1872.*

7) *Atti della R^a. Accademia delle Scienze di Torino, v. 7°, Adunanza del 9 giugno 1872.*

8) *Giornale di Matematiche di Napoli, v. X,* S. 313.

§ 1.

Liegen in einer Geraden g zwei Punktsysteme A und P, und sucht man, wobei ich im Folgenden die Abkürzung „Paar" für Punktpaar gebrauche, zu den Paaren von A die conjugirten Punkte für P, so erhält man eine neue Reihe von Paaren, die ein Punktsystem B bilden; A und B sind gleichzeitig hyperbolisch oder elliptisch. M, das Paar $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, das gleichzeitig ein Paar von A und P ist, ist ein solches auch für B; sind $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ imaginär, so sind die in diesem Falle stets reellen Doppelelemente von A, P und B Paare eines elliptischen Punktsystems M, das eben $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ vertritt; es folgt dies daraus, dass je ein Doppelelement von A mit je einem von B die Doppelelemente von P harmonisch trennt. Sind umgekehrt A und B gegeben und P gesucht, so ist Bedingung der Lösbarkeit dieser Aufgabe, dass A und B gleichzeitig hyperbolisch oder elliptisch sind.

Sind A und B hyperbolisch, ihre Doppelelemente $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, so erhält man zwei Lösungen P^1 und P^2:

P^1 bestimmt durch die Paare $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$,

P^2 „ „ „ „ $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1$.

Das reelle oder imaginäre Paar M, das A und B gemeinsam ist, ist ebenfalls ein Paar von P^1 und P^2. Die Punktsysteme M, P^1, P^2 stehen in einer bekannten merkwürdigen Beziehung.[1]) Die Doppelelemente eines dieser Punktsysteme bilden das gemeinschaftliche Paar der beiden andern.

Sind A und B elliptisch, so ist M hyperbolisch. Ist $\mathfrak{x}_1^\alpha\mathfrak{x}_2^\alpha$ ein beliebiges Paar von A und $\mathfrak{x}_1^\beta\mathfrak{x}_2^\beta$ das für ein gesuchtes P entsprechende Paar von B, so müssen $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{x}_1^\alpha\mathfrak{x}_1^\beta$, $\mathfrak{x}_2^\alpha\mathfrak{x}_2^\beta$ Paare von P sein. Die Eigenschaften des vollständigen Vierecks geben die Construction von $\mathfrak{x}_1^\beta\mathfrak{x}_2^\beta$, wenn das Paar $\mathfrak{x}_1^\alpha\mathfrak{x}_2^\alpha$ bekannt ist. Hierzu verbinde ich einen Punkt $\mathfrak{o}$ in einer durch g gehenden Ebene mit $\mathfrak{x}_1^\alpha$, $\mathfrak{x}_2^\alpha$ und $\mathfrak{m}_1$, wobei ich $\mathfrak{m}_1$ als das auf der endlichen Strecke $\mathfrak{x}_1^\alpha\mathfrak{x}_2^\alpha$ liegende Doppelelement von M voraussetze, durch Gerade und ziehe durch $\mathfrak{m}_2$ eine Gerade, welche $\mathfrak{o}\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{o}\mathfrak{x}_1^\alpha$, $\mathfrak{o}\mathfrak{x}_2^\alpha$ resp. in $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ trifft. Ist $\mathfrak{x}_1^\beta\mathfrak{x}_2^\beta$ gefunden, so schneiden sich $\mathfrak{t}\mathfrak{x}_1^\beta$ und $\mathfrak{s}\mathfrak{x}_2^\beta$ auf $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$. Verbinde ich $\mathfrak{t}$ mit den Punkten von g, $\mathfrak{s}$ mit den zu ihnen für B conjugirten Punkten, so erhalte ich in $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ projectivische Strahlbüschel von gleichem Drehungssinne, weil B elliptisch ist, und $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ auf derselben Seite von g liegen. Die Strahlbüschel $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ schneiden, da ihre Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$ liegen, diese Gerade in zwei ungleichlaufenden projectivischen Punktreihen, die bekanntlich stets zwei entsprechende Punkte gemeinsam haben. Jedes dieser Doppelelemente liefert, mit $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ ver-

1) Schroeter, Kegelschnitte, S. 56 u. 57.

bunden, ein zu $\mathfrak{x}_1^\alpha \mathfrak{x}_2^\alpha$ in der geforderten Weise zugeordnetes Paar von B und dadurch ein Punktsystem P. Es giebt also zwei Punktsysteme P^1 und P^2, für welche A und B polar sind.

Die nähere Betrachtung der auf $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$ befindlichen Punktreihen giebt die Eigenschaften von P^1 und P^2. Es schneiden nämlich die Strahlbüschel $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$ zwei Punktreihen in involutorischer Lage aus. Dem Strahl $\mathfrak{t}\mathfrak{m}_1$ entspricht $\mathfrak{s}\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{t}\mathfrak{m}_2$ ebenso $\mathfrak{s}\mathfrak{m}_1$; in den Punktreihen auf $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$ entsprechen sich daher die Punkte $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{r}$ gegenseitig. Da hiernach ein Paar gleicher entsprechender Strecken verkehrt auf einander liegen, so haben die Punktreihen involutorische Lage. Die Doppelelemente $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ des durch diese ungleichlaufenden Punktreihen erzeugten hyperbolischen Punktsystems D liefern durch ihre Verbindungslinien mit $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ die $\mathfrak{x}_1^\alpha \mathfrak{x}_2^\alpha$ für P^1 und P^2 zugeordneten Paare von B. Da $\mathfrak{m}_1\mathfrak{r}$ ein Paar von D ist, liegen $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ zu $\mathfrak{m}_1\mathfrak{r}$ harmonisch. Das Punktsystem P^1, welches der auf der endlichen Strecke $\mathfrak{m}_1\mathfrak{r}$ liegende Punkt $\mathfrak{d}_1$ liefert, ist stets hyperbolisch; denn der durch $\mathfrak{d}_1$ zu $\mathfrak{x}_2^\alpha$ gehörige Punkt $\mathfrak{x}_2^\beta$ liegt stets auf der endlichen Strecke $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, der zu $\mathfrak{x}_1^\alpha$ gehörige $\mathfrak{x}_1^\beta$ ausserhalb derselben, so dass $\mathfrak{x}_1^\alpha \mathfrak{x}_1^\beta$ und $\mathfrak{x}_2^\alpha \mathfrak{x}_2^\beta$ sich nie trennen können. $\mathfrak{d}_2$ liegt auf $\mathfrak{m}_1 \infty \mathfrak{r}$; liegt er auf $\mathfrak{m}_1 \infty$, so liegen $\mathfrak{y}_1^\beta \mathfrak{y}_2^\beta$, das zugehörige Paar von B für P^2, auf der Strecke $\mathfrak{x}_1^\alpha \mathfrak{x}_2^\alpha$; liegt $\mathfrak{d}_2$ auf $\infty\mathfrak{r}$, so liegen $\mathfrak{y}_1^\beta \mathfrak{y}_2^\beta$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{x}_1^\alpha \mathfrak{x}_2^\alpha$. In beiden Fällen trennen sich die Paare $\mathfrak{x}_1^\alpha \mathfrak{y}_1^\beta$ und $\mathfrak{x}_2^\alpha \mathfrak{y}_2^\beta$; das durch sie bestimmte Punktsystem P^2 ist elliptisch.

Da die Punkte $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ zu $\mathfrak{m}_1\mathfrak{r}$ harmonisch liegen, so müssen ihre Projectionen von $\mathfrak{t}$ nach g, d. h. die Punkte $\mathfrak{x}_1^\beta \mathfrak{y}_1^\beta$ zu den Projectionen von $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{r}$, zu $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ harmonisch liegen. Da $\mathfrak{x}_1^\beta$ und $\mathfrak{y}_1^\beta$ für P^1 und P^2 die conjugirten Punkte zu $\mathfrak{x}_1^\alpha$ sind, und wir diesen beliebig auf g wählen können, so haben wir den Satz:

Die conjugirten Punkte eines Punktes $\mathfrak{x}$ auf g für P^1 und P^2 sind ein Paar von M.

Ist $\mathfrak{x}$ Doppelelement von P^1, so ist hiernach der conjugirte Punkt für P^2 zu $\mathfrak{x}$ auch der conjugirte Punkt für M, also das andere Doppelelement von P^1. P^1 ist das gemeinschaftliche Paar von P^2 und M. Ebenso gilt P^2 als Paar von P^1 und M.

Aus diesen Beziehungen ist klar, dass P^2 durch M und P^1 bestimmt ist. Suchen wir also zu einem weitern Punktsystem C auf g, für welches M ein Paar ist, für P^1 das polare Punktsystem D, indem wir wieder zu den Paaren von C für P^1 die conjugirten Punkte suchen, so sind C und D auch für P^2 polar.

§ 2.

Für die folgende Untersuchung mögen grosse lateinische Buchstaben Flächen zweiter Ordnung, die entsprechenden grossen griechischen dieselben Flächen als Flächen zweiter Classe, kleine lateinische — Geraden

als Punktreihen, kleine griechische als Ebenenbüschel, grosse deutsche — Ebenen, kleine deutsche — Punkte bezeichnen.

Zwei Flächen zweiten Grades oder allgemein zwei räumliche Polarsysteme A und P haben ein gemeinsames Quadrupel harmonischer Pole[1]) (M). $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3\,\mathfrak{m}_4$ seien die Ecken des Tetraeders (M), m_{ik} die Kante $\mathfrak{m}_i\,\mathfrak{m}_k$, $\mathfrak{M}_i$ die $\mathfrak{m}_i$ gegenüberliegende Ebene, μ_{ik} die Kante $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_k)$, so dass $m_{12} = \mu_{34}$ etc. Ist ferner R ein räumliches Polarsystem, so inducire R auf $\mathfrak{M}_i$ das ebene Polarsystem R_i, auf m_{ik} das Punktsystem R_{ik}, im Punkte $\mathfrak{m}_i$ das Polarsystem P_i, in der Kante μ_{ik} das Ebenensystem P_{ik}.

Sucht man zu A für P das Polargebilde, so erhält man ein neues Polarsystem B. Das Tetraeder (M) ist in sich polar, also auch für B ein Quadrupel harmonischer Pole.

Einem Punkte $\mathfrak{x}$ auf m_{ik} entspricht für P polar eine Ebene $\mathfrak{X}$ durch μ_{ik}, $\mathfrak{x}$ bildet mit $(\mathfrak{X}, m_{ik})$ ein Paar von P_{ik}. Dem Punktsystem A_{ik} entspricht polar B_{ik}, und da B_{ik} mit B_{ik} perspectivisch liegt, sind A_{ik} und B_{ik} zu einander polar für P_{ik}. A und B induciren auf den Kanten von (M) gleichzeitig elliptische oder hyperbolische Punktsysteme.

Sind umgekehrt A und B gegeben, so kann man nach Polarsystemen P fragen, für welche A und B polar sind. Unter der Voraussetzung, die hiermit gemacht werde, dass Polarsysteme P, in denen einem reellen Punkte nicht stets eine reelle Polarebene entspricht, von der Untersuchung ausgeschlossen sind, liefert die vorhergehende Betrachtung als nothwendige Bedingung der Lösbarkeit allgemein, dass A_{ik} und B_{ik} gleichzeitig hyperbolisch oder elliptisch sind.

Diese Bedingung giebt bei allgemeiner Lage von A und B nach den drei Graden der Realität von (M) folgende lösbaren Fälle der Aufgabe:

Sind alle Ecken von (M) reell, so müssen A und B sein entweder imaginäre Ellipsoide oder einschaalige Hyperboloide, welche dieselben zwei Paar Kanten von (M) in reellen Punkten schneiden, oder nichtgeradlinige Flächen, welche dasselbe Tripel von Kanten in reellen Punkten treffen, also dieselbe Ecke von (M) im Innern haben. Sind nur zwei Ecken von (M) reell, so müssen A und B gleichzeitig geradlinige Flächen sein oder nicht. Sind alle Ecken imaginär, so ist die Aufgabe stets lösbar. Dass die hier angeführten Bedingungen für die Lösbarkeit ausreichend sind, zeigt die nachfolgende Lösung.

In jedem Falle sind von (M) zwei Gegenkanten reell[2]), sie seien m_{12} und m_{34}; an die auf ihnen befindlichen Punktsysteme knüpft sich, wenn die Bedingungen der Lösbarkeit erfüllt sind, die in allen Fällen giltige Lösung.

---

1) Vergl. Beyer, Inaugural-Diss., Breslau 1868.
2) Cremona, Oberflächen, S. 222.

Zunächst construire ich (§ 1) die Punktsysteme P^1_{12}, P^2_{12}, für welche A_{12} und B_{12} reciprok sind, und die ebenso zu A_{34} und B_{34} gehörigen Punktsysteme P^1_{34}, P^2_{34}. Die Flächen, für welche m_{12} und m_{34} conjugirte Gerade und irgend ein Paar jener Punktsysteme, z. B. P^i_{12}, P^k_{34}, die auf m_{12} und m_{34} inducirten Punktsysteme sind, bilden ein Flächenbüschel zweiter Ordnung (P^i_{12}, P^k_{34}). Die Grundcurve von (P^i_{12}, P^k_{34}) zerfällt in vier reelle, punktirt-imaginäre oder völlig imaginäre Geraden. Solcher Flächenbüschel sind im Ganzen vier möglich, ihnen müssen nach S. 8 die gesuchten Flächen P angehören.

Polarisiren wir A für irgend eine Fläche aus (P^i_{12}, P^k_{34}), so erhalten wir nicht B, sondern eine Fläche B', welche nach S. 7 mit B die Systeme B_{12}, B_{34}, B_{12}, B_{34}, also vier Gerade, die allerdings nicht reell zu sein brauchen, gemeinsam hat. Wählen wir die Fläche aus (P^i_{12}, P^k_{34}) so, dass einem System von Pol $\mathfrak{x}$ und Polare $\mathfrak{X}$ für A ein gleiches System für B entspricht, so sind B' und B identisch.

Ist g die durch $\mathfrak{x}$ gehende Gerade, die m_{12} und m_{34} trifft, und η die Verbindungslinie der Schnittpunkte von $\mathfrak{X}$, der Polare von $\mathfrak{x}$ für A, und m_{12} und m_{34}, so begegnen g und η den Kanten m_{12} und m_{34} in Paaren von A_{12} und A_{34}. Die Polaren von $\mathfrak{x}$ für (P^i_{12}, P^k_{34}) schneiden sich in einer Geraden η', wo η' die Punkte verbindet, die zu (g, m_{12}) und (g, m_{34}) für P^i_{12} und P^k_{34} conjugirt sind. Die Pole von $\mathfrak{X}$ für (P^i_{12}, P^k_{34}) liegen ebenso auf einer Geraden g', die durch die Punkte geht, die zu (η, m_{12}) und (η, m_{34}) für P^i_{12} und P^k_{34} conjugirt sind. Da nun A_{12} und B_{12} für P^i_{12}, A_{34} und B_{34} für P^k_{34} zu einander polar sind, bilden (g', m_{12}) und (η', m_{12}) ein Paar von B_{12}, (g', m_{34}) und (η', m_{34}) ein Paar von B_{34}. Die Polaren der Punkte auf g' für B gehen also auch durch η'.

Den Punkten auf g' sind dadurch die Ebenen durch η' auf zweifache Weise zugeordnet; einem Punkte $\mathfrak{x}'$ auf g' entspricht erstens $\mathfrak{X}'$, die Polare von $\mathfrak{x}'$ für B, zweitens $\mathfrak{X}''$, die Polare von $\mathfrak{x}$ für diejenige Fläche aus (P^i_{12}, P^k_{34}), für welche $\mathfrak{x}'$ der Pol von $\mathfrak{X}$ ist. Wir erhalten daher in η' zwei projectivische Ebenenbüschel und somit zwei Doppelelemente $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$. Ist $\mathfrak{e}_i$ der Punkt auf g', dem $\mathfrak{E}_i$ zugeordnet ist, so sind Pol und Polare $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ für A, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{E}_i$ und $\mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{X}$ für dieselbe Fläche P aus (P^i_{12}, P^k_{34}), $\mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{E}_i$ für B. Sucht man also zu $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ für P Polare und Pol, so erhält man $\mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{E}_i$, ein System von Pol und Polare von B; A wird durch P dual in B transformirt. Jedes der Doppelelemente $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ bestimmt mit $\mathfrak{x}$ als Pol eine Fläche P im Büschel (P^i_{12}, P^k_{34}). Da wir hiernach in jedem Büschel zwei Flächen der verlangten Art erhalten, gilt der Satz:

Es giebt acht Flächen, für welche zwei Flächen A und B polar zu einander sind.

Unsere Construction dieser Flächen giebt sofort eine Eigenschaft; in den Asymptotenpunkten eines der Punktsysteme $P^i_{\varrho\sigma}$ berühren sich vier Flächen P.

Die nähere Betrachtung der in η' vorhandenen projectivischen Ebenenbüschel liefert eine weitere Eigenschaft der acht Flächen P.

Dem Punkte (g', m_{12}) entspricht für B als Polare die Ebene (η', m_{34}); ferner ist (g', m_{12}) der Pol von $\mathfrak{X}$ für das Ebenenpaar in (P^i_{12}, P^k_{34}), das m_{12} als Doppelkante besitzt; die Polare von $\mathfrak{x}$ für diese Fläche ist die Ebene (η', m_{12}); der Ebene (η', m_{34}) in dem durch B bestimmten Ebenenbüschel entspricht also in dem durch (P^i_{12}, P^k_{34}) bestimmten Büschel die Ebene (η', m_{12}); ebenso entspricht der Ebene (η', m_{12}) des ersten Büschels im zweiten Büschel die Ebene (η', m_{34}). Da sich hiernach die Ebenen (η', m_{12}) und (η', m_{34}) in den Büscheln η' gegenseitig entsprechen, fällt ein Paar gleicher Winkel verkehrt in einander und die Ebenenbüschel haben involutorische Lage. Die Doppelelemente dieses Ebenensystems sind $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$, sie liegen harmonisch zu den Ebenen (η', m_{12}) und (η', m_{34}). Da $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ die Polaren eines beliebigen Punktes $\mathfrak{x}$ sind, so erhalten wir den Satz:

Die Polarebenen eines Punktes für zwei Flächen P, die (P^i_{12}, P^k_{34}) angehören, schneiden sich in einer m_{12} und m_{34} treffenden Geraden η' und sind zu den Ebenen (η', m_{12}) und (η', m_{34}) harmonisch.

Hierdurch ist zunächst klar, dass zwei solche Flächen, sie seien P' und P'', sich gegenseitig bestimmen. Sucht man also zu einer Fläche R, der (M) ein conjugirtes Tetraeder ist, für P' die Polarfläche Σ, so sind R und Σ auch für P'' polar. Construirt man zu allen Flächen R im Büschel (A, B) für P', also auch für P'', die Polarflächen Σ, so erhält man die Flächen der Schaar (B, A); zugleich ist dadurch (B, A) projectivisch auf (A, B) bezogen. Da (M) für jedes Paar R, Σ sich selbst conjugirt ist, so sind die zu R_{12}, S_{12} und R_{34}, S_{34} gehörigen Punktsysteme P_{12} und P_{34} mit den vier bei A und B gefundenen P^i_{12} und P^k_{34} identisch (§ 1). Die übrigen sechs Flächen P, für welche R und Σ dual sind, müssen demnach den drei noch übrigen Büscheln (P^i_{12}, P^k_{34}) angehören.

Es sei nun P''' eine dritte Fläche, für die A und B polar sind, und $(P^\varrho_{12}, P^\sigma_{34})$ das Büschel, dem P''' angehört. Die Polare von $\mathfrak{x}$ für R in (A, B) sei $\mathfrak{X}$, die Pole von $\mathfrak{X}$ für $(P^\varrho_{12}, P^\sigma_{34})$ liegen auf einer Geraden g', die m_{12} und m_{34} trifft; die Polaren der Punkte von g' für die zu R gehörige Fläche Σ bilden ein Ebenenbüschel, dessen Axe η' ebenfalls m_{12} und m_{34} trifft. Ist g wieder die Gerade, die durch $\mathfrak{x}$ geht und m_{12} und m_{34} begegnet, so müssen, da R und Σ für zwei Flächen in $(P^\varrho_{12}, P^\sigma_{34})$ polar sind, die Punkte (η', m_{12}) und (η', m_{34}) zu (g, m_{12}) und (g, m_{34}) für P^ϱ_{12} und P^σ_{34} conjugirt sein (S. 9). η' ist also ohne Rücksicht auf R und Σ allein durch $\mathfrak{x}$, P^ϱ_{12} und P^σ_{34} bestimmt, η' bleibt ungeändert, wenn R und Σ variiren.

Die Polaren von $\mathfrak{x}$ für das Büschel (A, B) bilden ein zu (A, B) und (B, A) projectivisches Ebenenbüschel, die Pole der Ebenen dieses Büschels

für P''' eine projectivische Punktreihe f. Die Polare eines Punktes $\mathfrak{y}$ auf f für die zugehörige Fläche in (B, A) geht durch η', weil P''' dem Büschel $(P^{\varrho}_{12}, P^{\sigma}_{34})$ angehört; durch η' gehen also die Polarebenen aller Punkte auf f für die zugehörigen Flächen in (B, A). Im Allgemeinen erhält man, wenn man zu den Punkten einer zu (B, A) projectivischen Punktreihe für die zugehörigen Flächen die Polaren sucht, eine projectivische Developpable dritter Classe oder eine einzige Ebene; in unserem Falle könnten die Polaren der Punkte von f ein projectivisches Ebenenbüschel oder eine einzige Ebene sein. Hier ist das Letztere der Fall; denn da durch P''' sowohl A in B, als B in A transformirt wird, so muss $\mathfrak{E}$, die Polare von $\mathfrak{x}$ für P''', als eine zwei Punkten von f, den Polen von $\mathfrak{E}$ für B und A, zugeordnete Ebene betrachtet werden. Dies ist aber nicht möglich, wenn sich in η' ein zu f projectivisches Ebenenbüschel befinden soll. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{E}$ allen übrigen Punkten von f, allen Elementen von (B, A) und (A, B) als zugeordnet zu betrachten ist.

Suchen wir daher für R in (A, B) zu $\mathfrak{x}$ die Polare $\mathfrak{X}$, zu $\mathfrak{X}$ für P''' den Pol $\mathfrak{e}$, zu $\mathfrak{e}$ für Σ in (B, A) die Polare $\mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{E}$ die Polare von $\mathfrak{x}$ für P'''. Sind umgekehrt $\mathfrak{e}$ der Pol von $\mathfrak{X}$ für P''', $\mathfrak{E}$ die Polare von $\mathfrak{x}$ für P''', wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ wieder Pol und Polare für R sind, so sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{E}$ Pol und Polare für Σ. R geht also durch Polarisation für P''' in Σ über. Dies giebt allgemein den Satz:

Eine Fläche im Büschel (A, B) hat für die acht Flächen, für welche A und B polar sind, dieselbe Polarfläche in der Schaar (B, A).

Da hiernach A und B vor R und Σ keinen Vorzug haben, können wir auch die letzteren als Ausgangspunkt wählen. Die unendlich vielen Büschel (R, S) und Schaaren (Σ, P) stehen zu den Flächen P in derselben Beziehung wie (A, B) und (B, A).

Dieselbe Schlussfolge, die wir auf dieser und der vorhergehenden Seite anwendeten, um zu zeigen, dass R und Σ für alle Flächen P polar sind, lässt sich benützen, um zu zeigen, dass eine Fläche im Büschel (A, S) zu einer Fläche in (B, P) für die acht Flächen P polar ist. Daraus folgt, dass allen Flächen des Bündels (A, B, S) die Eigenschaft zukommt, für die Flächen P dieselbe Polarfläche zu besitzen. Zieht man noch S' hinzu, die einer weitern Fläche R' in (A, B) polar für die Flächen P zugehört, so ist S' im Allgemeinen nicht eine Fläche des Bündels (A, B, S), und jene Eigenschaft erweitert sich auf alle Flächen des Gebüsches (A, B, S, S').

Ein weiteres Fortschreiten ist nicht möglich; denn für jede der Flächen A, B, S, S' ist (M) ein Quadrupel harmonischer Pole, und umgekehrt alle Flächen, für die (M) ein solches Quadrupel ist, bilden ein Gebüsch, so dass das abgeleitete Gebüsch (A, B, S, S') und das mit (M) gegebene identisch sein müssen.

Dies giebt den allgemeinen Satz:

Eine Fläche R, der (M) ein sich selbst conjugirtes Tetraeder ist, hat für alle Flächen P, für welche A und B polar sind, dieselbe Polarfläche.

Specielle Flächen R sind die Flächen P selbst. Da nun eine Fläche P ihre eigene Polarfläche ist, so gilt der Satz:

Eine Fläche P ist für alle Flächen P ihre eigene Polarfläche.

Aus diesem Satze folgt sofort eine linien-geometrische Eigenschaft der Flächen P. Hat eine dieser Flächen, z. B. P', reelle Punkte, so ist die Polare $\mathfrak{E}$ eines ihrer Punkte $\mathfrak{e}$ für eine andere Fläche, z. B. P'', Tangentialebene von P'; die Verbindungslinien von $\mathfrak{e}$ mit den Punkten der Geraden, in denen P' von $\mathfrak{E}$ geschnitten wird, treffen P' in Punktpaaren, die für P'' conjugirt sind. Im Allgemeinen ist die Singularitätenfläche des Complexes der Geraden, die eine Fläche zweiter Ordnung in Punktpaaren treffen, die für eine andere Fläche zweiter Ordnung conjugirt sind, eine Fläche vierter Ordnung; für die Flächen P' und P'' zerfällt diese in P' und P'' selbst.

Die Flächen, denen (M) ein conjugirtes Tetraeder ist, bilden ein in sich duales System. Man kann seine Flächen zweiter Ordnung auf seine Flächen zweiter Classe eindeutig beziehen; dies ist durch die Flächen P geschehen. Die acht Flächen P repräsentiren darin die sich selbst entsprechenden Elemente.

Mit einem Paare sich für die P entsprechender Flächen, z. B. mit A und B, sind eine Reihe invarianter Gebilde verbunden; diese sind auch für die Flächen P polar. Sucht man zu C, der Polarfläche von A für B, die Polarfläche C' für P, so ist C' die Polarfläche von B für A. Die Fläche zweiter Ordnung, von deren Punkten aus an A Tripel von Tangentialebenen gehen, die für B conjugirt sind, hat für P als Polarfläche den Ort der Ebenen, die für A conjugirte Punkttripel auf B enthalten. Ebenso sind die Flächen, die hieraus durch Vertauschung von A und B hervorgehen, und die durch A und B bestimmten Complexe für P polar.

Den Flächen eines in unserem Gebüsch enthaltenen Bündels zweiter Ordnung entsprechen für die Flächen P die Flächen eines linearen Systems zweiter Classe von zweifacher Unendlichkeit; die Polaren der gemeinsamen Punkte des Bündels zweiter Ordnung sind die gemeinsamen Ebenen des Systems zweiter Classe. Einem Punkte, der den Flächen des Bündels gemeinsam ist, entsprechen für die acht Flächen P acht verschiedene Polaren; diese sind für das System zweiter Classe die gemeinsamen Ebenen. Da man nun einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ als Grundpunkt eines zum Gebüsch gehörigen Bündels zweiter Ordnung auffassen kann, so gilt der Satz:

Die Polaren eines Punktes χ für die Flächen P sind die gemeinsamen Ebenen eines linearen Systems zweiter Classe von zweifacher Unendlichkeit; für alle Flächen dieses Systems ist (M) ein sich selbst conjugirtes Tetraeder.

Da die Flächen P in sich dual sind, so gilt auch der duale Satz. Ein specieller Fall von diesem ist:

Die Mittelpunkte der Flächen P sind die Grundpunkte eines Flächenbündels zweiter Ordnung, dessen Flächen (M) als sich selbst conjugirtes Tetraeder besitzen.

Eine Fläche des durch (M) bestimmten Gebüsches ist durch drei Punkte gegeben; die 24 in Bezug auf die Flächen P für drei beliebige Punkte des Raumes genommenen Polaren sind Tangentialebenen derselben Fläche zweiter Classe.

Eine Fläche des Gebüsches ist auch durch eine Gerade g bestimmt; die conjugirten Geraden einer Geraden g für die Flächen P sind acht Gerade einer Fläche zweiten Grades. Diese acht Geraden liegen auf B, wenn g auf A liegt. Die näheren Beziehungen dieser Geraden zum Tetraeder und zu den Flächen A und B geben Aufschluss über die nähere Art der Transformation von A und B in einander; doch wird diese Untersuchung besser für die einzelnen Fälle gesondert geführt.

Mit Hilfe der abgeleiteten Eigenschaften ist es leicht, Systeme von Flächen P zu construiren. Mit dem Tetraeder (M) ist ein Flächengebüsch gegeben; die eindeutige Beziehung zwischen seinen Elementen ist gegeben, sobald eine Fläche P bekannt ist. Dies zeigt, dass durch P und ein zu P conjugirtes Tetraeder (M), über dessen Realität Nichts vorausgesetzt zu sein braucht, die übrigen Flächen P bestimmt sind. Ein System von Flächen P in specieller Lage erhält man, wenn man von den Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades ausgeht.[1])

In geometrischen Untersuchungen im Raume treten sie bei allen Fragen auf, deren entsprechende in der Ebene auf harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte führen. Z. B. ist die Aufgabe, zwei reciproke Räume in polare Lage zu bringen, mit einem solchen System von acht Flächen verknüpft.[2])

§ 3.

Sind alle Ecken, Kanten und Ebenen von (M) reell, so treten die Eigenschaften der Flächen P in grösster Vollständigkeit reell auf.

Eine der in § 2 allgemein construirten Flächen P besitzt, wie (S. 382) nachgewiesen ist, die Eigenschaft, A in B zu transformiren. Einem

1) Die Gleichungen dieser acht Flächen sind in der Form $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ enthalten.

2) Vergl. Schroeter, Crelle Bd. 77, S. 120 u. 142.

Punkte $\mathfrak{x}$ auf $m_{\varkappa\lambda}$ entspricht für P als Polare eine Ebene $\mathfrak{X}$ durch $\mu_{\varkappa\lambda}$, und $\mathfrak{X}$ trifft $m_{\varkappa\lambda}$ in dem zu $\mathfrak{x}$ für $P_{\varkappa\lambda}$ conjugirten Punkte. Da nun bei der Transformation $A_{\varkappa\lambda}$ in $\mathsf{B}_{\varkappa\lambda}$ übergeht, und $B_{\varkappa\lambda}$ mit $\mathsf{B}_{\varkappa\lambda}$ perspectivisch liegt, so ist $P_{\varkappa\lambda}$ ein Punktsystem, durch das $A_{\varkappa\lambda}$ und $B_{\varkappa\lambda}$ polar in einander übergehen. Eine Fläche P löst also nicht nur in den bei ihrer Construction zu Grunde gelegten Kanten m_{12} und m_{34} das Problem der Polarität, sondern in allen sechs Tetraederkanten. Die Paare von Punktsystemen, die in den sechs Kanten von (M) das Problem der Polarität lösen, gehören zu je sechs auf achtfache Weise je einer Fläche zweiten Grades an.

Auf Grund dieser Eigenschaft schliesst sich die Discussion der Flächen P bei reellem (M) am einfachsten an die Punktsysteme auf den Kanten an. Zur Bestimmung der P wähle ich die auf den Kanten der Ecke $\mathfrak{m}_1$ liegenden Punktsysteme. Sind $P^1{}_{12}$, $P^1{}_{13}$, $P^1{}_{14}$ die hyperbolischen, $P^2{}_{12}$, $P^2{}_{13}$, $P^2{}_{14}$ die elliptischen Punktsysteme, die das Problem der Polarität auf m_{12}, m_{13}, m_{14} lösen, so bestimmen, da $m_{12}m_{13}m_{14}$ für alle P ein conjugirtes Tripel ist, irgend drei jener Punktsysteme, von denen auf jeder Kante je eins liegt, eine Fläche P. Bezeichnen wir mit $P^{\varrho\sigma\tau}$ die Fläche, welche die Punktsysteme $P^{\varrho}{}_{12}$, $P^{\sigma}{}_{13}$, $P^{\tau}{}_{14}$ inducirt, so sind die acht Flächen:

$$P^{222}\ P^{211}\ P^{121}\ P^{112}\ P^{111}\ P^{122}\ P^{212}\ P^{221}.$$

Die Fläche $P^{\varkappa\lambda\mu}$ ist wirklich mit einer Fläche P des § 2 identisch; denn die Fläche B', in die A durch $P^{\varkappa\lambda\mu}$ übergeht, hat mit B das conjugirte Tetraeder (M) und B_{12}, B_{13}, B_{14} gemeinsam, ist also mit B identisch. $P^{\varkappa\lambda\mu}$ inducirt also auch auf m_{23}, m_{34}, m_{42} Punktsysteme, welche auf diesen das Problem der Polarität lösen, so dass wir zu denselben acht Flächen $P^{\varkappa\lambda\mu}$ gelangen, wenn wir von einer andern Tetraederkante als $\mathfrak{m}_1$ ausgehen.

Von den Flächen $P^{\varkappa\lambda\mu}$ ist P^{222} ein imaginäres Ellipsoid, weil es auf den Kanten einer Ecke von (M) elliptische Punktsysteme inducirt. P^{211}, P^{121}, P^{112} sind einschaalige Hyperboloide, denn nur diese haben die Eigenschaft, auf zwei Kanten eines conjugirten Tripels hyperbolische, auf der dritten ein elliptisches Punktsystem zu induciren. Die drei Flächen P^{211}, P^{121}, P^{112} schneiden abwechselnd zwei Paar Gegenkanten von (M) in reellen, das dritte Paar in imaginären Punkten, so dass eine von ihnen individualisirt ist, wenn das Paar, das sie nicht reell trifft, angegeben ist. Die analoge Betrachtung zeigt, dass die übrigen vier Flächen nicht-geradlinige Flächen zweiten Grades sind; dabei kann man diese Flächen unter einander dadurch individualisiren, dass man eine Fläche der Ecke von (M) zuordnet, deren Kanten von ihr reell getroffen werden, die also in ihrem Innern liegt, während die übrigen Ecken ausserhalb der Fläche liegen. Unter den Flächen P^{111}, P^{122}, P^{212}, P^{221} können nicht zwei Ellipsoide sein. Zwei solche Flächen haben nämlich stets zwei reelle Punkte

einer Kante gemeinsam, die zu den Ecken der Kante harmonisch liegen, so dass eine Ecke stets auf der endlichen, durch die gemeinsamen Punkte begrenzten Strecke liegt. Wären beide Flächen Ellipsoide, so müsste diese Ecke im Innern beider liegen, was unmöglich ist. Dagegen können sowohl vier zweischaalige Hyperboloide, als auch drei zweischaalige Hyperboloide und ein Ellipsoid unter den Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ vorkommen; dies folgt daraus, dass der eine Fall sich aus dem andern durch collineare Transformation herleiten lässt.

Hiernach gilt der Satz:

Ist das gemeinsame Quadrupel (M) harmonischer Pole zweier Flächen zweiten Grades A und B reell, so giebt es ein imaginäres Ellipsoid, drei einschaalige, drei zweischaalige Hyperboloide und ein reelles Ellipsoid oder zweischaaliges Hyperboloid, für die A und B Polarflächen zu einander sind.

Aus dem Verhalten der Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ zum Tetraeder (M) folgt nebenbei, dass keine zwei dieser Flächen als Polargebilde eines reellen räumlichen Polarsystems aufgefasst werden können.

Die acht Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ zerfallen in zwei Gruppen zu je vier:

I) $P^{222}\ P^{211}\ P^{121}\ P^{112}$,

II) $P^{111}\ P^{122}\ P^{212}\ P^{221}$.

I) ist dadurch charakterisirt, dass ihre Flächen auf einem Paar conjugirter Geraden gleichartige, II) dadurch, dass ihre Flächen auf zwei solchen Geraden ungleichartige Punktsysteme induciren. Die Nothwendigkeit dieser Gruppirung zeigt die ganze folgende Untersuchung.

Geht man von einer Fläche I) aus, so erhält man eine Fläche II), indem man das Punktsystem auf einer durch $\mathfrak{m}_1$ gehenden Kante ändert; z. B. erhält man so P^{122} aus P^{222}. Dabei bleiben die Punktsysteme auf zwei Kanten einer Ebene, hier $\mathfrak{M}_2$, ungeändert; dies ist mithin auch für das ganze in $\mathfrak{M}_2$ befindliche Polarsystem der Fall. P^{222} und P^{122} haben also das gleiche Polarsystem in $\mathfrak{M}_2$, infolge dessen auch das gleiche Polarsystem im Punkte $\mathfrak{m}_2$; sie berühren sich in einem imaginären Kegelschnitte der Ebene $\mathfrak{M}_2$. Geht man von P^{112} statt von P^{222} aus, so erhält man die Berührung in einem reellen Kegelschnitte. Diese Eigenschaft besteht auch ersichtlicherweise für zwei Flächen aus I) und II), die nur durch Aenderung der drei Punktsysteme auf m_{12}, m_{13}, m_{14} aus einander hervorgehen. Dies giebt den Satz:

Irgend zwei Flächen aus verschiedenen Gruppen berühren sich in einem einer Tetraederebene angehörigen Kegelschnitte.

Die sämmtlichen Curven, in denen die Ebenen von (M) von den Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ getroffen werden, werden schon allein von den Flächen einer Gruppe ausgeschnitten.

Irgend zwei Flächen derselben Gruppe induciren auf zwei Gegenkanten dieselben Punktsysteme. Bei zwei einschaaligen Hyperboloiden sind diese hyperbolisch, die Verbindungslinien ihrer Asymptotenpunkte liegen ganz auf den Flächen; bei einem einschaaligen Hyperboloid und dem imaginären Ellipsoid sind beide Punktsysteme elliptisch, die Verbindungslinien der Asymptotenpunkte ganz imaginär; bei zwei Flächen der Gruppe II) ist eins der Punktsysteme elliptisch, das andere hyperbolisch, die Verbindungslinien der Asymptotenpunkte punktirt-imaginär, die Flächen berühren sich in den reellen Asymptotenpunkten und haben in den gemeinsamen Tangentialebenen dieser Punkte dieselben Polarsysteme.

Dies lässt sich in den Satz zusammenfassen:

Irgend zwei Flächen derselben Gruppe schneiden sich in vier reellen, punktirt-imaginären oder ganz imaginären Geraden.

Die Schnitte der Tetraederebenen mit den Flächen $I^{\varrho\sigma\tau}$ liefern weitere Eigenschaften.

Sind $\mathfrak{x}$, x Pol und Polare für A_i, so sind ihre Polargebilde in Bezug auf die Fläche $P^{\varrho\sigma\tau}$ eine Polare und Polgerade für B_i; diese treffen $\mathfrak{M}_i$ in Polare und Pol x', $\mathfrak{x}'$ für B_i; da (M) für A, B, $P^{\varrho\sigma\tau}$ gleichzeitig conjugirtes Tetraeder ist, so sind $\mathfrak{x}$, x' und $\mathfrak{x}'$, x auch Pol und Polare für $P_i^{\varrho\sigma\tau}$; $P_i^{\varrho\sigma\tau}$ ist daher ein ebenes Polarsystem, für das A_i und B_i polar sind. Die acht Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ schneiden die Ebenen von (M) in vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitten, die für die Schnitte von A und B dieselbe Bedeutung haben, wie die $P^{\varrho\sigma\tau}$ für A und B selbst. Berücksichtigen wir noch die dualen Eigenschaften, so gilt der Satz:

Die Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ lösen die Aufgabe der Polarität für die Flächen A und B, für ihre Polarsysteme in den Ebenen und Ecken von (M) und für ihre Punkt- und Ebenensysteme in den Kanten von (M).

Aus den Eigenschaften der harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte folgt, dass die Asymptotenpunkte der auf den Kanten einer Ebene $\mathfrak{M}_i$ gelegenen hyperbolischen Punktsysteme $P^1_{\varrho\sigma}$ die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden. Z. B. geht die Gerade, die einen Asymptotenpunkt von P^1_{12} und einen von P^1_{13} verbindet, durch einen Asymptotenpunkt von P^1_{23}. Nimmt man also auf drei durch eine Ecke gehenden Kanten von (M) je einen Asymptotenpunkt und verbindet dieses Tripel durch eine Ebene $\mathfrak{G}$, so trifft $\mathfrak{G}$ die Kanten der Gegenebene in drei Asymptotenpunkten. Theilt man die sechs Asymptotenpunkte der drei Kanten so in zwei Gruppen zu drei, dass keiner Gruppe zwei Punkte derselben Kante angehören, so erhält man zwei Verbindungsebenen der Punkte je einer Gruppe, und diese Ebenen schneiden sich in einer Geraden der Gegenebene. Da man nun die drei Paare von Asymptoten-

punkten auf 2.2.2 Arten zu drei so combiniren kann, dass keine zwei derselben Kante einer Gruppe angehören, so erhalten wir acht Verbindungsebenen, von denen jede sechs der zwölf Asymptotenpunkte der Punktsysteme $P^1_{\varrho\sigma}$ enthält. Ein Paar Asymptotenpunkte liegt zu den Ecken der zugehörigen Kante harmonisch, lässt sich also als eine specielle Fläche zweiter Classe auffassen, für welche (M) ein conjugirtes Tetraeder ist. Die betrachteten Verbindungsebenen können daher als die acht gemeinschaftlichen Tangentialebenen der drei Flächen zweiter Classe P^1_{12}, P^1_{13}, P^1_{14} angesehen werden. Es giebt infolge dessen ein zweifach-unendliches System von Flächen zweiter Classe, für die jene acht Ebenen Tangentialebenen und (M) ein conjugirtes Tetraeder ist; specielle Elemente dieses Systems sind die sechs Paare von Asymptotenpunkten auf den Tetraederkanten.

Die duale Betrachtung liefert ebenso acht Punkte, diese sind zu jenen acht Ebenen für die Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ die Pole.

Mit den Punktsystemen auf den Kanten von (M) ist die Construction des Poles $\mathfrak{e}$ einer Ebene $\mathfrak{E}$ für eine Fläche $P^{\varrho\sigma\tau}$ gegeben; man sucht zu den Schnittpunkten von $\mathfrak{E}$ mit den Kanten für die auf diesen inducirten Punktsysteme die conjugirten Punkte und verbindet den so auf je einer Kante erhaltenen Punkt mit der Gegenkante durch eine Ebene; drei durch eine Ecke gehende Verbindungsebenen schneiden sich in einer Geraden, die sechs Verbindungsebenen in $\mathfrak{e}$, dem Pole von $\mathfrak{E}$. Sind $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ Flächen aus verschiedenen Gruppen, so haben sie die Punkte auf den drei Kanten einer Ebene $\mathfrak{M}_i$ gemeinsam, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$, die Pole von $\mathfrak{E}$ für $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ liegen mit $\mathfrak{m}_i$ in einer Geraden. Der Satz, dass die conjugirten Punkte eines Punktes χ auf $m_{\varkappa\lambda}$ für $P^1_{\varkappa\lambda}$ und $P^2_{\varkappa\lambda}$ ein Paar von $\mathfrak{m}_\varkappa\mathfrak{m}_\lambda$ sind, zeigt, dass $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ zu $\mathfrak{m}_i$ und dem Schnittpunkte von $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$ mit $\mathfrak{M}_i$ harmonisch liegen. Nehmen wir noch das Resultat der analogen Betrachtung für zwei Flächen derselben Gruppe hinzu, so folgt:

Die Pole einer Ebene $\mathfrak{E}$ für zwei Flächen verschiedener Gruppen liegen zu einer Ecke von (M) und ihrer Polare, für zwei Flächen derselben Gruppe zu einem Gegenkantenpaar harmonisch.

Einen Theil des dualen Satzes erhielten wir schon S. 10.

An die gegenseitige Reproduction der Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$, die übrigens aus dem soeben angeführten Satze sofort folgt, knüpfen sich noch einige Eigenschaften.

Hat eine Fläche, z. B. $P^{\varrho\sigma\tau}$, reelle Punkte und ist $\mathfrak{E}$ eine ihrer Tangentialebenen, so ist $\mathfrak{e}$ der Berührungspunkt und $\mathfrak{e}'$, der Pol von $\mathfrak{E}$ für eine Fläche $P^{\varkappa\lambda\mu}$ der andern Gruppe, derjenige Punkt von $P^{\varrho\sigma\tau}$, in dem sie die Gerade $\mathfrak{e}\mathfrak{m}_i$ zum zweiten Male trifft, wenn $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ ihre gemeinschaftliche Curve in $\mathfrak{M}_i$ haben. Umgekehrt trifft jede Gerade

durch $\mathfrak{m}_i$ eine der Flächen $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ in zwei Punkten, die für die andere conjugirt sind. Eine Ebene durch $\mathfrak{m}_i$ schneidet $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ in zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten von solcher Lage, dass alle durch $\mathfrak{m}_i$ gehenden Geraden diese Kegelschnitte in vier harmonischen Punkten treffen; zwei solche Kegelschnitte stehen also in derselben Beziehung, wie zwei harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte.[1]) Die gemeinschaftlichen Tangentialebenen schneiden die Flächen in vier harmonischen Geraden, von denen allerdings stets ein Paar imaginär ist.

Unter den durch $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ definirten Liniengebilden betrachte ich noch die Congruenz der Geraden, die gleichzeitig dem Reye'schen Complex und dem Complex der Geraden angehören, deren Schnittpunkte mit $P^{\varkappa\lambda\mu}$ für $P^{\varrho\sigma\tau}$ conjugirt sind. Im Allgemeinen ist dies eine Congruenz vierten Grades, welche die singulären Geraden des zweiten Complexes repräsentirt.[2]) In unserem Falle reducirt sie sich auf die Congruenz (1, 0) der durch $\mathfrak{m}_i$ gehenden Geraden und die Congruenz (2, 2) der Geraden, die $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ in ihren gemeinschaftlichen Punkten berühren.

Da der Reye'sche Complex auf den Punktraum abgebildet ist, so ist dies auch mit den singulären Geraden der Fall. Im Allgemeinen erhält man dadurch eine merkwürdige Fläche vierter Ordnung;[3]) in unserem Falle zerfällt diese in die doppelt zu zählende $\mathfrak{M}_i$ und den gemeinsamen Tangentialkegel von $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$.

Die analoge Betrachtung für zwei Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ aus derselben Gruppe liefert folgende Resultate:

Eine Ebene durch eine der beiden Kanten, in denen $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ dieselben Punktsysteme induciren, schneidet diese Flächen in harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten; die singulären Geraden der $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ harmonisch treffenden Geraden bilden eine Congruenz (1, 1), deren Leitgeraden eben die Kanten sind, in denen beide Flächen dieselben Punktsysteme induciren.

S. 13 hat sich ergeben, dass die conjugirten Geraden einer Geraden r für die acht Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ auf einer Fläche zweiten Grades liegen. Sind σ_1 und σ_2 die conjugirten Geraden zu r für zwei Flächen derselben Gruppe, so bilden sie mit dem Paar Gegenkanten, auf denen jene Flächen dieselben Punktsysteme induciren, vier harmonische Gerade einer Regelschaar; denn die Verbindungslinie der Pole einer durch r gehenden Ebene für die Flächen treffen diese Kanten in zwei zu den Polen har-

1) Im Allgemeinen giebt es bei zwei Flächen zweiten Grades nur 16 solcher Ebenen.

2) Voss, Math. Ann. Bd. 10, S. 143.

3) Die Fläche hat vier Doppelpunkte von der speciellen Art, dass eine Generatrix des Tangentialkegels in einem Doppelpunkte in diesem mit der Fläche vier Punkte gemein hat.

monisch liegenden Punkten. Sind σ_1 und σ_3 die conjugirten Geraden für zwei Flächen aus verschiedenen Gruppen $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$, so haben sie in der Ebene $\mathfrak{M}_i$, in der die Berührungscurve von $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ liegt, einen gemeinsamen Punkt; denn der Ebene $(r, \mathfrak{m}_i)$ entspricht für beide Flächen derselbe Punkt in $\mathfrak{M}_i$ als Pol. Die gemeinsame Ebene von σ_1 und σ_3 ist die gemeinsame Polarebene des Punktes $(r, \mathfrak{M}_i)$. Aus der Eigenschaft, dass die Polaren eines beliebigen Punktes von r sich auf $\mathfrak{M}_i$ schneiden und zu $\mathfrak{M}_i$ und der Ebene, die ihren Schnitt mit $\mathfrak{m}_i$ verbindet, harmonisch liegen, folgt, dass σ_1 und σ_3 zu der Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit $\mathfrak{m}_i$ und der Schnittlinie ihrer Ebene mit $\mathfrak{M}_i$ harmonisch liegen. Von den acht zu r conjugirten Geraden gehören die für eine Gruppe von $P^{\varkappa\lambda\mu}$ conjugirten einer Regelschaar, die übrigen der andern Regelschaar einer Fläche zweiten Grades an.

Hieraus folgt der Satz:

Sind A und B geradlinige Flächen, (a_1), (a_2) und (b_1), (b_2) ihre Regelschaaren, so führt eine Gruppe der Flächen $P^{\varkappa\lambda}$ (a_1) in (b_1) und (a_2) in (b_2), die andere Gruppe (a_1) in (b_2) und (a_2) in (b_1) über.

Im Besondern können auf A und B Gerade liegen, welche die Curve (A, B) berühren. Eine auf A liegende Tangente von (A, B) muss durch $P^{\varkappa\lambda\mu}$ in eine auf B liegende übergehen; denn einer Geraden auf A, die B berührt, muss eine Gerade auf B, die A berührt, entsprechen. Hieraus ergiebt sich, dass mit einer Tangente von (A, B) auf A acht Tangenten auf B und damit auch auf A im Ganzen acht vorhanden sind. Es giebt also auf A und B gleichzeitig keine oder acht reelle Tangenten von (A, B).[1]) Da C, die Polarfläche von A für B, durch die Berührungspunkte der auf A liegenden Tangenten geht, so folgt, dass C die Curve (A, B) entweder in 0 oder 8 reellen Punkten schneidet; das Gleiche gilt für die Polarfläche von B für A.

Ist $\mathfrak{a}$ der Punkt, in dem eine auf A liegende Tangente B berührt, $\mathfrak{B}$ die Tangentialebene an A in dem Berührungspunkte einer auf B liegenden Tangente von A, so sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ Pol und Polare für eine Fläche $P^{\varkappa\lambda\mu}$. Legt man durch $\mathfrak{a}$ eine Gerade, die ein Paar Gegenkanten von (M) trifft, so müssen ihre Treffpunkte zu den Schnittpunkten von $\mathfrak{B}$ mit den Kanten für ein Paar Punktsysteme $P^i_{\varrho\sigma}$ conjugirt sein.[2])

§ 4.

Für die Untersuchung dieses Paragraphen seien vom Tetraeder (M) nur zwei Ecken $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ reell, dann sind weiter $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, m_{12}, m_{34} reell. Da $\mathfrak{m}_3$ und $\mathfrak{m}_4$ imaginär sind, wird m_{34} von A und B stets in

1) Cremona, Oberflächen, S. 223.

2) Vergl. Schroeter, Kegelschnitte, S. 397 flg.

reellen Punkten geschnitten; die Aufgabe ist lösbar, wenn m_{12} von A und B gleichzeitig in reellen Punkten getroffen wird oder nicht. Die Discussion knüpft sich in diesem Falle am einfachsten an die in $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gelegenen Kegelschnitte. $\mathfrak{M}_1$ enthält m_{34}, schneidet also A und B in den reellen Curven A_1 und B_1. Von dem Tripel conjugirter Punkte in $\mathfrak{M}_1$ sind $\mathfrak{m}_2$ und m_{34} Pol und Polare, die übrigen Elemente sind imaginär. Die Flächen P müssen aus demselben Grunde wie in § 3 je einen der Kegelschnitte enthalten, für welche A_1 und B_1 polar sind. In diesem Falle giebt es nur zwei solcher Kegelschnitte, P_1^1 und P_1^2, von denen der eine P_1^1 Ellipse, der andere P_1^2 Hyperbel ist; P_1^1 und P_1^2 berühren sich in zwei reellen Punkten von m_{34}.[1]) Da die Punktsysteme $P^1{}_{12}$, $P^2{}_{12}$ zu $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ conjugirt sind, lässt sich eine Fläche P bestimmen, wenn man ausser der Bedingung, dass (M) conjugirtes Tetraeder sein soll, von ihr verlangt, dass sie einen Kegelschnitt P^i_1 und ein Punktsystem $P^k{}_{12}$ enthält. Da auf diese Weise jeder Kegelschnitt P^i_1 zwei Flächen P liefert, erhalten wir als Lösung unserer Aufgabe in diesem Falle vier Flächen. Diese vier Flächen schneiden auch $\mathfrak{M}_2$ in den Kegelschnitten P_2^1 (Ellipse) und P_2^2 (Hyperbel), für welche A_2 und B_2 polar sind. Die Kegelschnitte P_1^1, P_1^2, P_2^1, P_2^2 gehen durch dieselben Punkte von m_{34}.

Von diesen Flächen sind die beiden, welche das hyperbolische Punktsystem $P^1{}_{12}$ enthalten, einschaalige Hyperboloide, weil sie auf m_{12} und m_{34} hyperbolische Punktsysteme induciren. Diejenige dieser Flächen, welche durch die Ellipse P_1^1 geht, enthält ihrer Natur nach in der zu $\mathfrak{M}_1$ conjugirten Ebene $\mathfrak{M}_2$ die Hyperbel P_2^2, sie sei hiernach bezeichnet durch P^{12}; das zweite einschaalige Hyperboloid geht ebenso durch P_1^2 und P_2^1 und sei durch P^{21} bezeichnet. Die analog bezeichnete Fläche P^{11} ist Ellipsoid, weil sie zwei conjugirte Ebenen in Ellipsen schneidet, P^{22} zweischaaliges Hyperboloid, weil sie auf m_{12} und m_{34} ungleichartige Punktsysteme inducirt und Hyperbeln enthält. Dies liefert den Satz:

Sind von dem conjugirten Tetraeder zweier Flächen A und B nur zwei Ecken reell, so giebt es zwei einschaalige, ein zweischaaliges Hyperboloid und ein Ellipsoid, für die A und B polar sind.

P^{12}, P^{21} schneiden sich in vier reellen, P^{11}, P^{22} in vier punktirt-imaginären Geraden; eine der Flächen P^{12}, P^{21} berührt P^{11} und P^{22} in je einem Kegelschnitte. Aus diesem Verhalten erkennen wir, dass von den acht Polarsystemen P, die sich bei vollständig reellem Tetraeder (M) ergeben, in jeder Gruppe zwei imaginär geworden sind. Für die Flächen, die reell geblieben sind, gelten alle in § 3 abgeleiteten Eigenschaften. Z. B. besteht der Satz: Sind A und B einschaalige Hyperboloide, (a_1), (a_2) und (b_1), (b_2) die Regelschaaren von A und B, so führen

1) Schroeter, Kegelschnitte, S. 396 flg.

P^{12}, P^{21} (a_1) in (b_1), (a_2) in (b_2) und P^{11}, P^{22} (a_1) in (b_2), (a_2) in (b_1) über. Auch die Eigenschaften der auf A und B liegenden Tangenten von (A, B), deren es in diesem Falle in jeder Regelschaar zwei giebt,[1]) folgen auf dieselbe Weise wie in § 3.

§ 5.

Sind alle Ecken des zu A und B gehörigen Tetraeders (M) imaginär und nur m_{12} und m_{34} reell, so sind A und B stets einschaalige Hyperboloide, die m_{12}, m_{34} in reellen Punkten treffen, und die Aufgabe ist stets lösbar.

Die Lösung des Problems für die Punktsysteme A_{12}, B_{12} und A_{34}, B_{34} liefert in diesem Falle zwei Paare von hyperbolischen Punktsystemen $P^1{}_{12}$, $P^2{}_{12}$ und $P^1{}_{34}$, $P^2{}_{34}$; die durch sie bestimmten Flächenbüschel $(P^i{}_{12}, P^k{}_{34})$, denen die gesuchten Flächen P angehören sollen, haben also vier reelle Geraden als Schnittcurve. Die Polaren eines Punktes $\mathfrak{x}$ auf A für $(P^i{}_{12}, P^k{}_{34})$ bilden ein Ebenenbüschel; die Axe η' dieses Ebenenbüschels trifft m_{12} und m_{34} und ist durch den Punkt $\mathfrak{x}$ und durch $P^i{}_{12}$ und $P^k{}_{34}$ gegeben; durch $\mathfrak{x}$ geht eine Gerade g, und die conjugirten Punkte zu (g, m_{12}) und (g, m_{34}) sind für $P^i{}_{12}$ und $P^k{}_{34}$ die Punkte (η', m_{12}) und (η', m_{34}). Die Polare von $\mathfrak{x}$ für eine der gesuchten Flächen P muss B berühren. Je nachdem es nun durch η' reelle oder imaginäre Tangentialebenen an B giebt, liefert das Büschel zwei oder keine reellen Flächen P.

Es zeigt sich, dass nur zwei dieser Büschel reelle Flächen P liefern.

Von zwei Büscheln nämlich, die eins der Punktsysteme $P^i{}_{\varrho\sigma}$ gemeinsam haben, z. B. von $(P^1{}_{12}, P^1{}_{34})$ und $(P^1{}_{12}, P^2{}_{34})$, kann nur das eine reelle Flächen P enthalten. Die Axen η'_1 und η'_2 der Polarenbüschel von $\mathfrak{x}$ für diese Flächenbüschel haben einen Punkt gemeinsam, den conjugirten Punkt zu (g, m_{12}) für $P^1{}_{12}$; die Punkte (η'_1, m_{34}) und (η'_2, m_{34}), die conjugirten Punkte zu (g, m_{34}) für $P^1{}_{34}$ und $P^2{}_{34}$, bilden ein Paar des durch die Paare A_{34} und B_{34} bestimmten Punktsystems.[2]) Die Ebene $\mathfrak{E}$, in der $\eta'_1\eta'_2 m_{34}$ liegen, schneidet A und B in zwei Kegelschnitten, für welche m_{34} die Polare des Punktes (η'_1, η'_2) ist. Da das durch A_{34} und B_{34} bestimmte Punktsystem elliptisch ist, liegt einer der Punkte (η'_1, m_{34}) und (η'_2, m_{34}) innerhalb, der andere ausserhalb der Schnittcurve von B und $\mathfrak{E}$; es trifft also stets eine und nur eine der Geraden η'_1 und η'_2 diese Schnittcurve oder B selbst in reellen Punkten. Folglich gehen auch nur durch eine der Geraden und stets durch eine reelle Tangentialebenen von B, und nur eins von den Büscheln $(P^1{}_{12}, P^1{}_{34})$ und $(P^1{}_{12}, P^2{}_{34})$ liefert reelle Flächen P. Da dies von zwei beliebigen Büscheln, die auf einer

1) Cremona, Oberflächen, S. 221.
2) Schroeter, Kegelschnitte, S. 57.

Kante ein Punktsystem gemeinsam haben, gilt, so enthalten nur zwei Büschel, sie seien (P^1_{12}, P^1_{34}) und (P^2_{12}, P^2_{34}), reelle Flächen P, und es giebt stets vier und nur vier Flächen, für welche A und B polar zu einander sind. Die Construction zeigt, dass diese vier Flächen einschaalige Hyperboloide sind, von denen zweimal zwei ein räumliches Vierseit gemeinsam haben.

Wir haben hiermit das Resultat:

Wenn von dem conjugirten Tetraeder zweier Flächen zweiten Grades alle Ecken imaginär sind, so giebt es vier einschaalige Hyperboloide, für welche jene Flächen zu einander polar sind.

A und B schneiden sich, wenn die Ecken von (M) imaginär sind, stets in einer reellen Curve (A, B); es giebt vier Gerade auf A, die (A, B) berühren, sie gehören derselben Regelschaar von A an; das Gleiche gilt von B.[1]) Sind $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$ die Punkte, in denen die auf A liegenden Tangenten B berühren, so giebt es unter diesen zwei Paare, deren Verbindungslinien die Kanten m_{12} und m_{34} treffen; diese Paare seien $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$; ebenso seien $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ die Tangentialebenen von A, welche durch die auf B gelegenen Tangenten gehen, und zwar mögen sich $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ in Geraden schneiden, die m_{12} und m_{34} begegnen.

Es muss dann $\mathfrak{B}_k$ für eine und nur eine Fläche P^ϱ die Polare von $\mathfrak{a}_i$ sein; ferner müssen für P^ϱ zwei Punkten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_k$, deren Verbindungslinie dem reellen Gegenkantenpaar begegnet, zwei Ebenen $\mathfrak{B}_\sigma$, $\mathfrak{B}_\tau$ entsprechen, von deren Schnittlinie dies der Fall ist. Berücksichtigt man dies, so erhält man für die Flächen P^1, P^2, P^3, P^4 folgende Zusammengehörigkeit von Pol und Polare:

Für:	Pol.	Polare.
P^1	$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4$
P^2	$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_3$
P^3	$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$
P^4	$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_1$

Diese Zusammenstellung zeigt sofort die Eigenschaft der gegenseitigen Reproduction der Flächen P.

Da die Tangenten von (A, B) auf A und B nur je einer Regelschaar angehören, so werden A und B durch die Flächen P^ϱ nur so

1) Cremona, Oberflächen, S. 222. Ist C die Polarfläche von A für B, so liefert die Untersuchung der drei geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche m_{12}, m_{31} und je eine der Curven (A, B), (B, C), (A, C) enthalten, einen andern Beweis dieses Satzes.

dual in einander transformirt, dass (a_1) in (b_1) und (a_2) in (b_2) übergehen, wenn (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) wieder die Regelschaaren von A und B bedeuten.

Diese Eigenschaften zeigen, dass von den acht Flächen P, die bei vollständiger Realität von (M) auftreten, in diesem Falle die ganze Gruppe I) reell geblieben ist, wobei allerdings aus dem imaginären Ellipsoid ein einschaaliges Hyperboloid geworden ist. Die Paare P^1, P^2 und P^3, P^4 haben ein reelles, zwei beliebige andere Flächen ein imaginäres Vierseit gemeinsam. In den Complexen der Geraden, die eine Fläche P^i in conjugirten Punkten einer andern P^k treffen, bilden die singulären Geraden wieder Congruenzen (1, 1). Die Leitgeraden dieser Congruenzen sind für die Paare P^1, P^2 und P^3, P^4 reell, nämlich m_{12} und m_{34}, für ein anderes Paar sind die Leitgeraden imaginär, zwei imaginäre Gegenkanten von (M).

Lebenslauf.

Ich, Hermann Thieme, ev. Confession, wurde am 9. November 1852 zu Neu-Limmritz in der Mark Brandenburg geboren und erhielt meine Schulbildung auf dem Gymnasium zu Frankfurt a. O., woselbst ich durch den Unterricht des Herrn Oberlehrers Dr. Kretschmer vielfache Anregung zum Studium der Mathematik erhielt.

Ostern 1873 bezog ich mit dem Zeugnisse der Reife die hiesige Universität und hörte die Vorlesungen der Herren Professoren: Bachmann, Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Grube, Loewig, Meyer, Neumann, Roemer, Rosanes, Schroeter und des Herrn Dr. Pernet. Während mehrerer Semester nahm ich an den Uebungen des von den Herren Professoren Schroeter und Meyer geleiteten Seminars und an den mathematischen Uebungen des Herrn Prof. Rosanes Theil, in je einem Semester an den von den Herren Professoren Dorn und Meyer geleiteten Uebungen im physikalischen Cabinet und an den philosophischen Uebungen des Herrn Professor Dilthey. Allen genannten Herren, besonders aber den Herren Professoren Schroeter, Rosanes, Meyer, Dilthey, deren persönlicher Anleitung ich mich vielfach zu erfreuen hatte, fühle ich mich zum grössten Dank verpflichtet.

Am 22. März d. J. wurde eine von mir eingereichte Bearbeitung der von der philosophischen Facultät gestellten mathematischen Preisaufgabe über das räumliche Analogon der von Steiner (Crelle, Bd. 53 S. 231) behandelten Frage des Preises für würdig erklärt.

Thesen.

I. Der Construction der Curven und Flächen durch Curvenbüschel resp. Flächenbündel ist ihre Definition durch ihre Polarensysteme vorzuziehen.

II. Zur bessern Verwerthung der modernen Algebra für die Geometrie ist eine weitere Ausbildung der geometrischen Verwandtschaftstheorien nothwendig.

III. Für die Theorie der ebenen Curven 3. O. ist eine einheitliche, reingeometrische Ableitung ihrer Eigenschaften wünschenswerth.

IV. Für Gymnasien besitzt die Geometrie einen grösseren bildenden Werth als die Algebra.